EXERCICE 4 **6 points**

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (2 - \ln x)\ln x.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal est donnée sur la feuille **ANNEXE**.

1. Lire sur le graphique la limite de la fonction f en 0. Retrouver ce résultat à l'aide de l'expression de $f(x)$.
2. Montrer que la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est définie par $f'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{x}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x est dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ puis donner les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. **a.** On appelle A et B les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses (Voir le graphique). Calculer les abscisses des points A et B.

   b. Calculer le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A. Tracer la droite $\mathscr{T}$ sur le graphique donné en annexe.
5. Montrer que la fonction F définie par

$$F(x) = -x(\ln x)^2 + 4x\ln x - 4x$$

   est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
6. On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$.

   a. Hachurer sur le graphique donné en annexe le domaine $\mathscr{D}$.

   b. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.