III.3 loi de Poisson

La loi de Poisson modélise des situations où l'on s'intéresse au nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps déterminé ou dans une région donnée. Par exemple :

- Nombre d'appels téléphoniques qui arrivent à un standard en x minutes,
- nombre de clients qui attendent à la caisse d'un magasin,
- nombre de défauts de peinture par m^2 sur la carrosserie d'un véhicule ...

Définition 8
*La variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ lorsque sa loi de probabilité vérifie :*

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

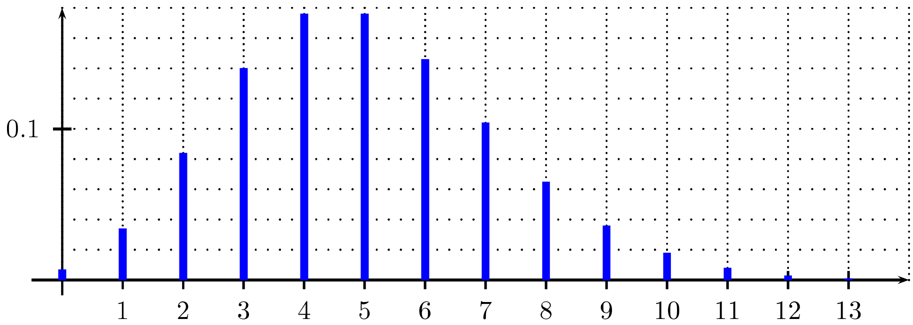
Le formulaire donne pour certaines valeurs du paramètres les probabilités $p(X=k), k \in \mathbb{N}$. Les valeurs non écrites sont négligeables. On peut aussi taper la formule directement sur la calculatrice.

Exemple 16
On considère la variable aléatoire X mesurant le nimbre de clients se présentant au guichet 1 d'un bureau de poste par intervalle de temps de durée 10 minutes entre 14h30 et 16h30.
On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

- Pour $\lambda = 5$, la table de la loi de poisson nous donne :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p(X=k)$	$0,007$	$0,034$	$0,084$	$0,140$	$0,176$	$0,176$	$0,146$	$0,104$	$0,065$	$0,036$	$0,018$	$0,008$	$0,003$	$0,001$	$0,000$

- On peut aussi représenter graphiquement la loi $\mathcal{P}(5)$:



- La porbabilité qu'entre 14h30 et 14h40, 10 personnes exactement se présentent à ce guichet vaut :
  $P(X=10) = 0,018$.
- La porbabilité qu'entre 15h20 et 15h30, au maximum 3 personnes se présentent à ce guichet vaut :
  $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0,265$.
- La porbabilité qu'entre 16h00 et 16h10, 8 personnes au moins se présentent à ce guichet vaut :
  $P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=8)] = 1 - 0,867 = 0,133$.

Propriété 6
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, alors l'espérance et la variance sont égales et valent $E(X) = V(X) = \lambda$.

Exemple 17
Dans l'exemple précédent, on obtient $E(X) = V(X) = 5$.