Mardi 7 avril 2020

Mathématiques

Devoir de confinement

SANY
Guillaume
TS-SI

Exercice 50 page 160

1) a) On a $f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x = (\ln x)\left((\ln x)^2 - 3\right)$. ✓

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ✓
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 - 3 = +\infty$ ✓

Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. ✓

b) Etudions la limite de f en 0 :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ ✓
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (\ln x)^2 - 3 = +\infty$ ✓

Par produit, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ ✓

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$. ✓

(u*v)' = u'v+uv'

cu^n)' = n * u' * u ^(n-1)

2) On a $f'(x) = \frac{1}{x} \times 3 \times (\ln x)^{3-1} - 3 \times \frac{1}{x} = \frac{3(\ln(x))^2}{x} - \frac{3}{x} = \frac{3((\ln x)^2 - 1)}{x}$ pour $x > 0$

On remarque l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Ce qui donne :

$f'(x) = \frac{3(\ln x + 1)(\ln x - 1)}{x}$, $x > 0$.

3) Pour $x > 0$, on a $\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$ et $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$

On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$ et de variation de f suivant :

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
x		$+$		$+$		$+$	
$\ln x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

$f(e^{-1}) = (\ln(e^{-1}))^3 - 3\times\ln(e^{-1}) = (-1)^3 - 3\times(-1) = 2$

$f(e) = (\ln(e))^3 - 3\times\ln(e) = 1 - 3\times 1 = -2$

4) $f(x)=0 \Leftrightarrow (\ln x)^3 - 3\ln x = 0 \Leftrightarrow (\ln x)((\ln x)^2-3) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $(\ln x)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$ ou $(\ln x)^2 = 3$.

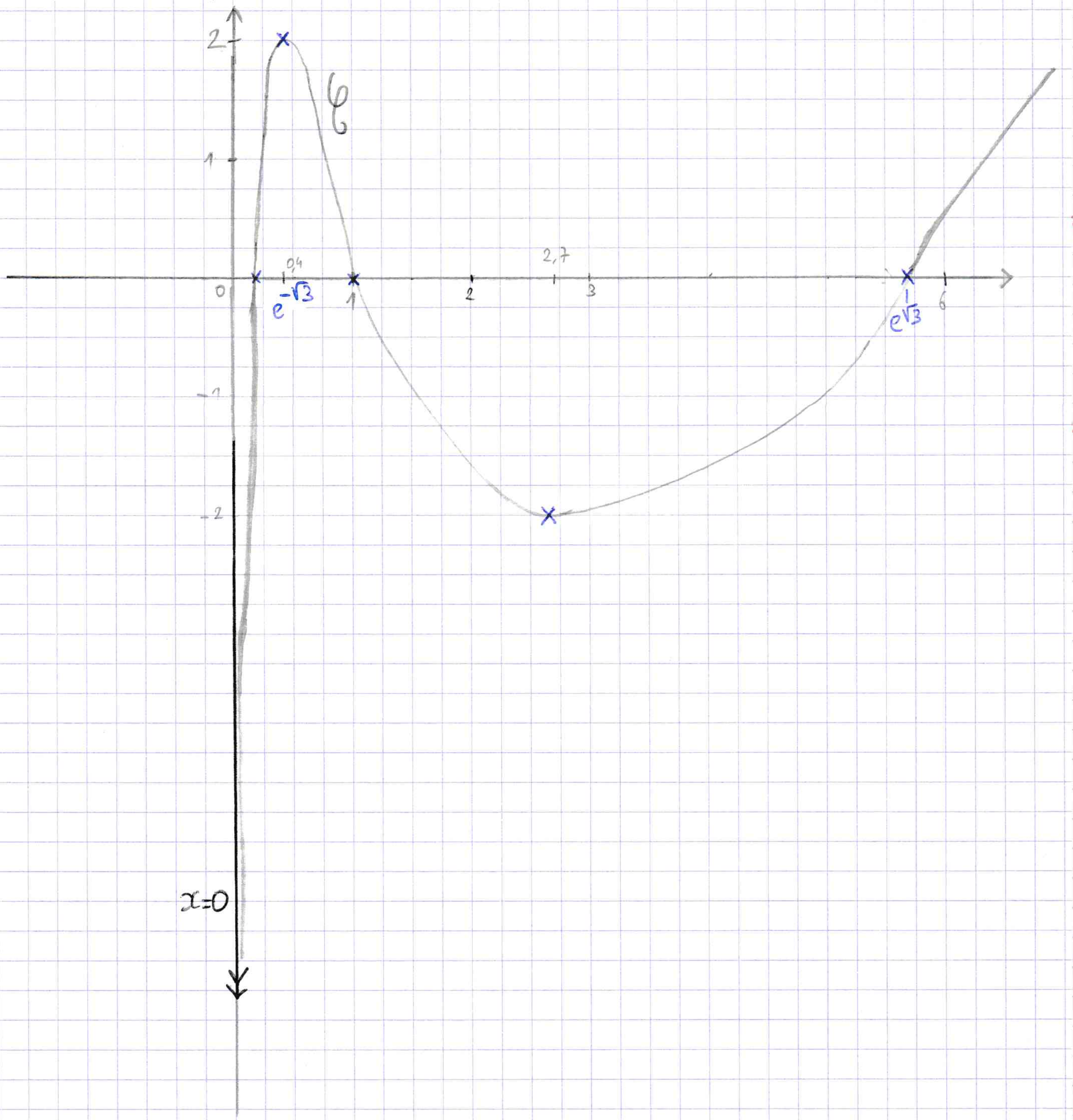
$(\ln x)^2 = 3 \Leftrightarrow \ln x = \sqrt{3}$ ou $\ln x = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = e^{\sqrt{3}}$ ou $x = e^{-\sqrt{3}}$

Finalement, $S = \{1 ; e^{-\sqrt{3}} ; e^{\sqrt{3}}\}$ ✓

5) $e^{-\sqrt{3}} \approx 0,2$ $\quad$ $e^{\sqrt{3}} \approx 5,7$

$e \approx 2,7$ $\quad$ $e^{-1} \approx 0,4$



2
1
-1
-2
0
0,4
$e^{-\sqrt{3}}$
1
2
2,7
3
$e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$
6
$\mathcal{C}$
$x=0$