CHAPITRE

6 Intégration

Sommaire

Partie A (s8)

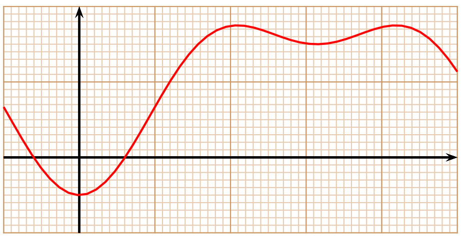
Les calculs d'aire de figures géométriques simples comme les rectangles, les polygones et les cercles sont décrits dans les plus anciens documents mathématiques connus. La première réelle avancée au-delà de ce niveau élémentaire a été faite par **Archimède**. *Grâce à sa technique, on pouvait calculer des aires bornées par des paraboles et des spirales.*

Au début du XVIII^{e} siècle, plusieurs mathématiciens ont cherché à calculer de telles aires de manière plus simple à l'aide de limites. Cependant, ces méthodes manquaient de généralité. La découverte majeure de la résolution du problème d'aire fut faite indépendamment par Newton et Leibniz lorsqu'ils s'aperçurent que l'aire sous une courbe pouvait être obtenue en inversant le processus de différentiation. Cette découverte, qui marqua le vrai début de l'analyse, fut répandue par **Newton** *en 1669 et Indépendamment par* **Leibniz** *aux environs de 1673.*

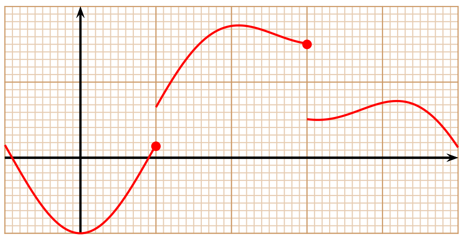
Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère orthonormal (O, I, J).

1 Intégrale d'une fonction

Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite continue sur I si on peut tracer sa courbe représentative dans un repère d'un trait continu sans lever le crayon.



fonction continue



fonction discontinue

1.1 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition 1.

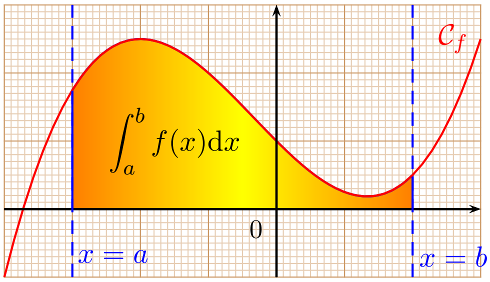
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $\text{I} = [a; b]$.
On appelle **intégrale de f sur I** l'aire du domaine délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note alors cette intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

le x dans « dx » est à la variable par rapport à laquelle on effectue les calculs

Cette aire est exprimée en unités d'aire (u.a.), qui correspond à l'aire du rectangle de côtés OI et OJ.v

On peut visualiser cette aire de la façon suivante :



Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

la valeur de l'intégrale est indépendante du choix de F

Propriété 2.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathrm{I} = [\,a; b\,]$ et F une primitive de f sur I, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

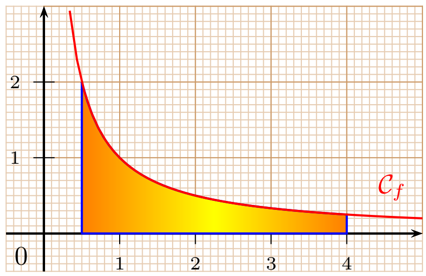
Pour les calculs, on note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [\,F(x)\,]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple 3

Aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 4$ dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm :

avec wxMaxima : `integrate(1/x,x,1/2,4)`

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)]_{\frac{1}{2}}^{4} \\ &= \ln 4 - \ln \frac{1}{2} \\ &= \ln 4 + \ln 2 \\ &= \ln 8 \text{ u.a.} \approx 2,08 \text{ cm}^2\end{aligned}$$



1.2 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

dans ce cas, l'intégrale ne correspond pas forcément à l'aire du domaine

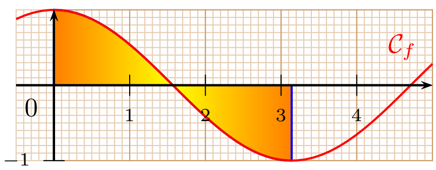
Définition 4.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathrm{I} = [\,a; b\,]$ dont F est une primitive. On appelle **intégrale de f de a à b** le réel défini par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Exemple 5

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x &= [\,\sin x\,]_0^{\pi} \\ &= \sin \pi - \sin 0 \\ &= 0\end{aligned}$$



2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Linéarité

Propriété 6.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[\,a;b\,]$ de $\mathbb{R}$ et λ un réel, alors :

- $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,;$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Ce théorème permet en pratique de ramener le calcul d'une intégrale d'une fonction complexe à une succession d'intégrations de fonctions plus élémentaires.

Exemple 7

$$\begin{aligned}
I = \int_1^2 \left(6x+\frac{5}{x}\right)\,\mathrm{d}x &= 3\int_1^2 2x\,\mathrm{d}x + 5\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= 3[\,x^2\,]_1^2 + 5[\,\ln x\,]_1^2\\
&= 3(2^2-1)+5(\ln 2-\ln 1)\\
&= 9+5\ln 2.
\end{aligned}$$

2.2 Positivité

Propriété 8.

Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle $[\,a;b\,]$ de $\mathbb{R}$.

- si f est positive sur $[\,a;b\,]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0\,;$
- si pour tout $x\in[\,a;b\,]$, $f(x)\leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Remarque 9

La réciproque de la positivité n'est pas forcément vraie, on peut avoir $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ *sans avoir* f *positive sur* $[\,a;b\,]$ *:*

- $$\begin{aligned}\int_0^3 (2x-1)\,dx &= [\,x^2-x\,]_0^3\\ &= (3^2-3)-(0^2-0)\\ &= 6.\end{aligned}$$
  Donc, $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)\,dx \geq 0.$
- *Cependant, la fonction* $f : x \to 2x-1$ *n'est pas positive sur* $[\,0\,;3\,]$ *(par exemple,* $f(0)=-1$*).*

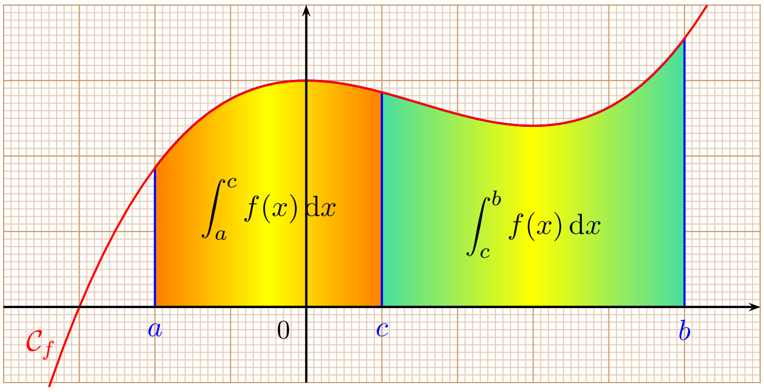
2.3 Relation de Chasles

Propriété 10.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ et $c \in [a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Interprétation graphique :



Remarque 11
Michel Chasles était un mathématicien français né en 1793 et mort en 1880.

Partie B (S16)

3 Calcul d'aires

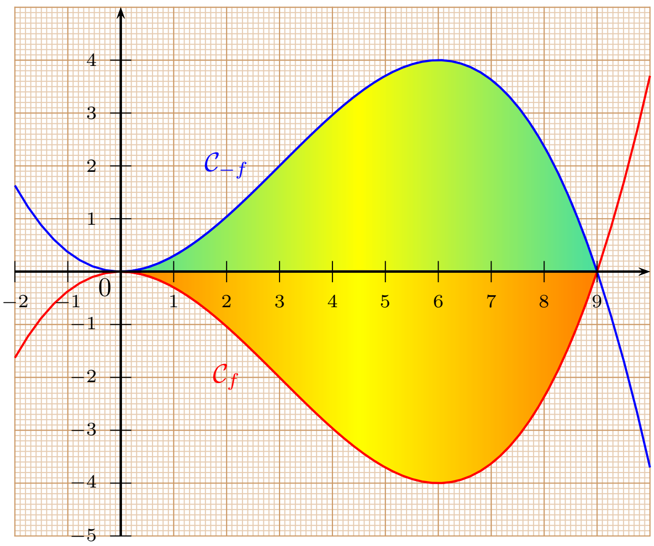
3.1 Aire d'un domaine compris entre une courbe et l'axe des abscisses

3.1.1 Cas d'une fonction négative

Si la fonction f est négative, alors la fonction $-f$ est positive et les courbes sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Donc, l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine compris entre la courbe de $-f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Dans ce cas, $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x$.

Exemple 12
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{27} - \dfrac{x^2}{3}$.
$f(x) = \dfrac{x^2}{27}(x-9)$
f est négative sur $]-\infty\,;9]$, en particulier sur l'intervalle $[0\,;9]$.



$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^9 (-f(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^9 \left(-\frac{x^3}{27} + \frac{x^2}{3}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{x^4}{108} + \frac{9^3}{9}\right]_0^9\\ &= \left(-\frac{9^4}{108} + \frac{9^3}{9}\right) - 0\\ &= \frac{81}{4} \text{ u.a.}\end{aligned}$$

3.1.2 cas d'une fonction changeant de signe

Pour calculer l'aire d'un domaine défini par une fonction changeant de signe, il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant puis utiliser la relation de Chasles.

Exemple 13
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 2$. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 3$.
f est positive sur $]-\infty\,;-1] \cup [2\,;+\infty[$ et négative sur $[-1\,;2]$.

On découpe l'aire en deux partie : l'une, $\mathcal{A}_1$ entre les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$ et l'autre, $\mathcal{A}_2$ entre les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$

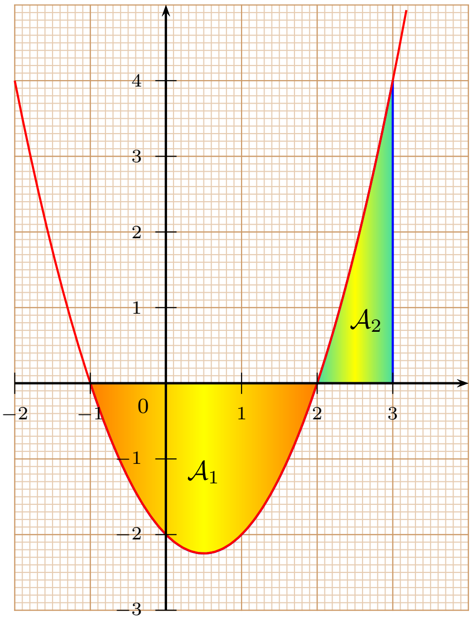
$\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-1}^{2} (-f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} (x^2 - x - 2)\,\mathrm{d}x$

$\mathcal{A} = \left[-\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} + \left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x\right]_{2}^{3}$

$\mathcal{A} = \dfrac{11}{2} + \dfrac{11}{6}$

$\mathcal{A} = \dfrac{19}{3} \approx 6,33$ u.a.



3.1.3 Récapitulatif

Propriété 14.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$ de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). L'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ si f est positive sur $[\,a\,;b\,]$;
- $\displaystyle\int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x$ si f est négative sur $[\,a\,;b\,]$;
- la somme des aires de chacun des domaines où la fonction est de signe constant si f change de signe sur $[\,a\,;b\,]$.

3.2 Aire d'un domaine compris entre deux courbes

Propriété 15.

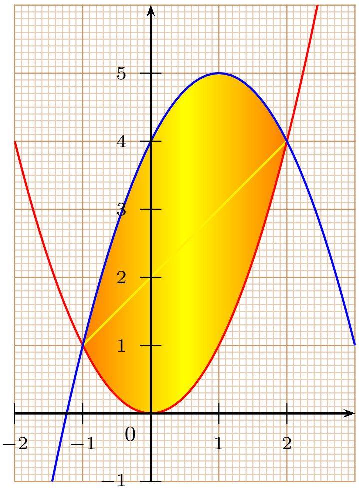
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$ de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout x de $[\,a\,;b\,]$, $f(x) \leq g(x)$ et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). L'aire de la partie du plan limitée par les courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

Exemple 16

Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 4$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$
$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} ((-x^2 + 2x + 4) - (x^2))\,\mathrm{d}x$$
$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x$$
$$\mathcal{A} = \left[-2 \times \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2}\,\mathrm{d}x$$
$\mathcal{A} = 9$ u.a.



4 Valeur moyenne

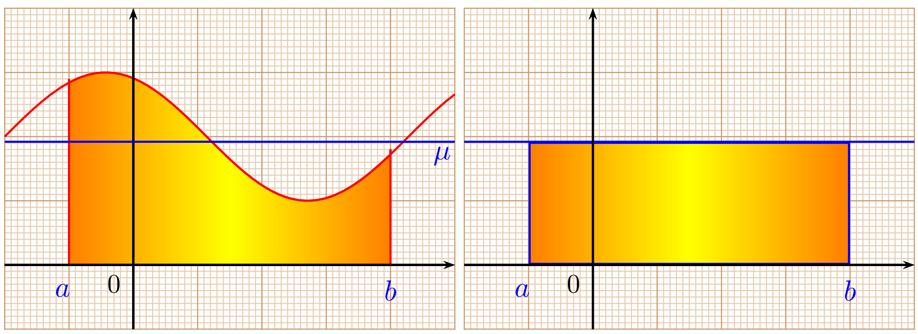
le signe $\int$ se dit aussi « somme », ce qui nous donne une formule similaire à la formule de la moyenne classique

Définition 17.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$ de $\mathbb{R}$, on appelle **valeur moyenne** de f sur $[\,a\,;b\,]$ le nombre réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation graphique si f est positive sur $[\,a\,;b\,]$:
le réel μ est le réel pour lequel l'aire délimitée par la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle dont les côtés ont pour mesures $b - a$ et μ.



Exemple 18

La valeur moyenne sur $[\,-1\,;1\,]$ de la fonction carré est : $\mu = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \dfrac{1}{3}$.