CHAPITRE

5 Fonctions exponentielles

Sommaire

Partie A (s7)

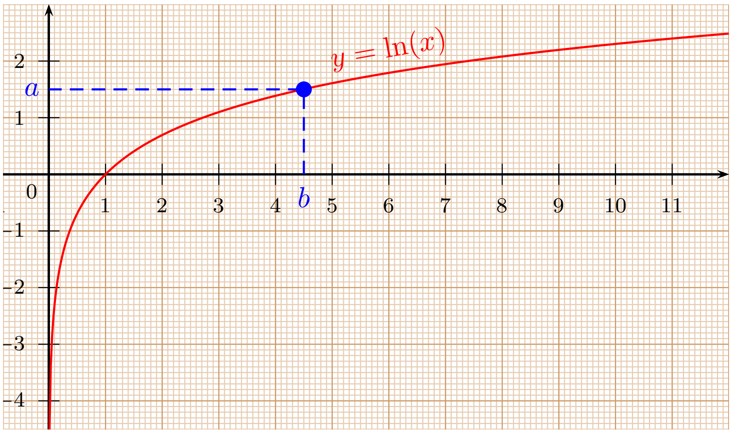
La naissance de la fonction exponentielle est le fruit d'un long murissement qui n'aboutit qu'à la fin du XVII^e siècle. L'idée de combler les trous entre plusieurs puissances d'un même nombre est très ancienne.
Par exemple, Archimède aurait exprimé de grands nombres en utilisant une formulation qui s'apparente à une exponentielle dans son traité sur les grains de sables, mais c'est seulement en 1697 que Jean Bernoulli étudie la fonction exponentielle en tant que telle. Les fonctions exponentielles font alors leur entrée officielle dans le corpus mathématique.
La première apparition de la lettre e *pour désigner la base du logarithme népérien date de 1728, dans un manuscrit d'Euler qui le définit comme le nombre dont le logarithme est l'unité et qui se sert des tables de Vlacq pour l'évaluer à 2,7182817.*

Léonhard Euler (1707-1783)

1 Définition et première propriétés

1.1 L'exponentielle comme fonction inverse du logarithme

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, et prend toutes les valeurs de $]-\infty;+\infty[$. Pour toute valeur a de $\mathbb{R}$, il existe donc un unique nombre b strictement positif tel que $\ln b = a$.



Définition 1.

Pour tout réel a, on appelle **exponentielle de** a, et on note $\exp(a)$, l'unique réel b strictement positif tel que $\ln b = a$.

Conséquences directes :
- $\exp(a) > 0$;
- $\ln(\exp a) = a$;
- $\exp(\ln b) = b$;
- $b = \exp a \iff \ln b = a$.

1.2 Relation fondamentale

l'exponentielle vérifie la relation fonctionnelle $f(a+b) = f(a) \times f(b)$

Propriété 2.

Pour tous réels a et b, on a la relation fondamentale suivante :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Démonstration :
Soient a et b deux réels, on a :

- d'une part $a + b = \ln(\exp(a+b))$;
- d'autre part $a + b = \ln(\exp a) + \ln(\exp b) = \ln(\exp a \times \exp b)$; *$\ln X + \ln Y = \ln XY$*

l'égalité des deux expressions fourni le résultat.

Tout comme la relation fondamentale du logarithme, la propriété se généralise au cas de n nombres réels :

$$\boxed{\exp(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \exp(a_1) \times \exp(a_2) \times \cdots \times \exp(a_n)}$$

Dans le chapitre sur la fonction logarithme népérien, on a vu que $\ln \mathrm{e} = 1$, et on a aussi $\ln(\exp 1) = 1$, on peut donc noter $\mathrm{e} = \exp(1)$.
On a également $\exp(n) = \exp(n \times 1) = \exp(1)^n = \mathrm{e}^n$.

D'où la notation : $\boxed{\text{pour tout réel } x\text{, on pose } \exp(x) = \mathrm{e}^x}$

Propriété 3.

Soient a et b deux réels et n est un entier relatif, alors :

- $\ln\left(\mathrm{e}^a\right) = a$;
- $\mathrm{e}^a \times e^b = \mathrm{e}^{a+b}$;
- $\dfrac{1}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{-a}$;
- $\mathrm{e}^{\ln b} = b$;
- $\left(\mathrm{e}^a\right)^n = \mathrm{e}^{an}$;
- $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$.

on observe les mêmes propriétés que pour les puissances

En résumé, l'exponentielle a la particularité de transformer les sommes en produits, les différences en quotients et les multiplications en puissances.

Exemple 4
Transformations d'expressions numériques et algébriques :

- $e^2 \times e^3 = e^5$;
- $\dfrac{1}{e^5} = e^{-5}$;
- $\dfrac{e^7}{e^2} = e^5$;
- $(e^{-2})^{-3} = e^6$;
- $e^{x+3} \times e^{2x+1} = e^{(x+3)+(2x+1)} = e^{3x+4}$;
- $\dfrac{1}{e^{-2x}} = e^{2x}$;t
- $\dfrac{e^{3x-2}}{e^{-4x+2}} = e^{(3x-2)-(-4x+2)} = e^{7x-4}$;
- $(e^{x-2})^2 = e^{2x-4}$.

2 Etude de la fonction exponentielle

on note aussi $x \mapsto \exp(x)$

Définition 5.

La **fonction exponentielle** f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Propriété 6.

On a les limites importantes suivantes :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Conséquence : la droite $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Propriété 7.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $(e^x)' = e^x$.

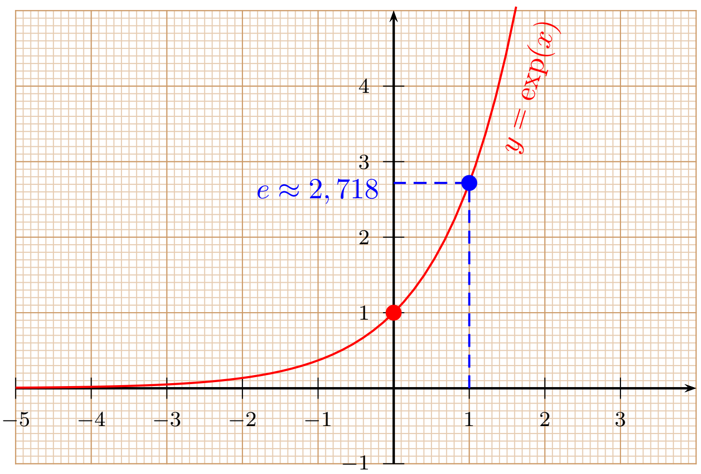
Démonstration :

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

on dérive la relation $\ln e^x = x$, on obtient : $\dfrac{(e^x)'}{e^x} = 1$ d'où $(e^x)' = e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

La dérivée de la fonction exponentielle est strictement positive, donc la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Remarque 8

On dit que la fonction exponentielle est la fonction ***réciproque*** *de la fonction logarithme, ce qui signifie que graphiquement, les courbes sont symétriques par rapport à la première bissectice ($y = x$).*