# Chap 13 Application du produit scalaire.

## Table des matières


I. Projeté orthogonal d'un vecteur sur un axe ........ 1
II. Equations cartésiennes dans un repère orthonormé ........ 1
1. Equation cartésienne d'une droite ........ 1
2. Equation cartésienne de cercle ........ 2
III. Relation métrique dans le triangle ........ 3
1. Théorèmes de la médiane ........ 3
2. Théorème de Pythagore généralisé : théorème d'Al-Kashi ........ 3
3. Formule des aires et propriété des sinus ........ 4
IV. Trigonométrie ........ 4
1. Formules d'addition ........ 4
2. Formules de linéarisation ........ 5
V. Lieu ........ 5


## I. Projeté orthogonal d'un vecteur sur un axe

Propriété :

Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan et d un axe du plan de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$

Le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur d est le vecteur $(\vec{u}.\vec{v})\vec{u}$.

dessin

Corollaire :

- Le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\binom{x}{y}$ sur l'axe (O ; $\vec{\imath}$) est le vecteur x$\vec{\imath}$
- Le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\binom{x}{y}$ sur l'axe (O ; $\vec{\jmath}$) est le vecteur y$\vec{\jmath}$

dessin

## II. Équations cartésiennes dans un repère orthonormé

*Comment caractériser un ensemble de points (cercle, droite, parabole).*

*Les points qui constituent un ensemble respectent tous la même contrainte (les coordonnées des points vérifient une équation)*

*et réciproquement, tous les points qui respectent cette contrainte appartiennent à cet ensemble.*

### 1. Équation cartésienne d'une droite

Définition :

Un vecteur normal à une droite d est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de d.

*Rappel : équation réduite de droite y = ax + b (y=mx + p) (coef directeur et ordonnée à l'origine)*

Propriété :

- Une droite de vecteur normal $\vec{n}$(a,b) a une équation cartésienne de la forme ax + by + c = 0
- Si les coordonnées des chacun des points d'un ensemble d vérifient la contrainte ax + by + c = 0 alors d est une droite de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$.

*La contrainte est donnée par le produit scalaire*

Exemple :

- Donner une équation cartésienne de la droite d de vecteur normal $\vec{n}$(3,8) et passant par A(-1 ;4).

M(x ;y) ∈ d ⇔ $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ *tout est là !*

⇔ $\binom{x-(-1)}{y-4} . \binom{3}{8} = 0$

⇔ (x+1)3 + (y-4)8 = 0

⇔ 3x + 8y – 29 = 0 (donner une équation réduite : y = - $\frac{3}{8}$x + $\frac{29}{8}$)

- Donner un vecteur normal et un point de la droite d'équation 2x – y + 1 = 0

$\vec{n}$(2,-1) est un vecteur normal et A(0 ;1)

*Un vecteur directeur est donc orthogonal au vecteur normal donc* $\vec{u}(1; 2)$ *est un vecteur directeur*

Remarque : pour trouver une contrainte liant les coordonnées, on aurait aussi pu se servir de la colinéarité. Soit d la droite de vecteur directeur $\vec{u}$(2 ;5) et passant par A(3,1)

M(x ;y) ∈ d ⇔ $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

⇔ (x – 3)5 – (y – 1)2 = 0

⇔ …

## 2. Équation cartésienne de cercle

Propriété :

- Un cercle a un équation cartésienne de la forme x² + y² + ax + by + c = 0
- Si les coordonnées des chacun des points d'un ensemble $\mathscr{C}$ vérifient la contrainte x² + y² + ax + by + c = 0 alors $\mathscr{C}$ est un cercle (ou l'ensemble vide)

Exemple :

- Donner une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω(-2 ;5) et de rayon R=7

M(x ;y) ∈ $\mathscr{C}$ ⇔ ΩM = $R$ *tout est là , définition d'un cercle : ensemble de points situé à égale distance d'un autre point*

⇔ ΩM² = $R^2$ car les mesures de distance sont positives.

⇔ (x – (-2))² + (y – 5)² = 7²

⇔ x² + y² + 4x – 10y – 20 = 0

- Donner les éléments caractéristiques de l'ensemble $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne x² + y² - 6x – 4y – 3 = 0

x² + y² - 6x – 4y – 3 = 0 ⇔ (x – 3)² - 9 + (y – 2)² - 4 – 3 = 0

⇔ (x – 3)² + (y – 2)² - 16 = 0

⇔ (x – 3)² + (y – 2)² = 16

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre Ω(3 ;2) et de rayon 4.

- Donner les éléments caractéristiques de l'ensemble $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne x² + y² - 6x – 4y – 3 = 0

x² + y² + 6x – 8y +50 = 0 ⇔ (x – (-3))² + (y – 4)² = -25

$\mathscr{C}$ est l'ensemble vide.

Propriété :
Un point M appartient au cercle de diamètre [AB] si seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

*Cette propriété est fondée sur la propriété : tout triangle dont un côté est un diamètre de son cercle circonscrit est rectangle et tout triangle rectangle admet pour cercle circonscrit le cercle de diamètre l'hypoténuse.*

Exemple :

- Donner une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] avec A(1 ;5) B(-2 ;4)

M(x ;y) $\in \mathscr{C}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ *tout est là*

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-4 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ (x-1)(x+2) + (y-5)(y-4) = 0

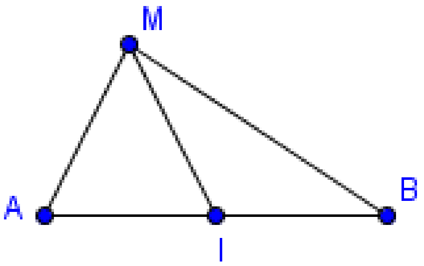
$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + x - 9y + 18 = 0$

# III. Relation métrique dans le triangle

## 1. Théorèmes de la médiane

Théorème :
Soit A et B et 2 points du plan et I le milieu de [AB].

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$




Démonstration :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 \\ &+ 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \frac{AB^2}{4} \\ &+ \frac{AB^2}{4} = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \end{aligned}$$

*Complément :*

- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - AI^2$
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

*(ce sont les mêmes : il suffit de voir un parallélogramme)*

Démonstration :
$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = MI^2 - AI^2$

## 2. Théorème de Pythagore généralisé : théorème d'Al-Kashi

Théorème :
Pour tout triangle ABC, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ *est le défaut d'orthogonalité (si ce défaut est nul, triangle est rectangle)*

Remarque :
Dans le triangle rectangle ABC on note $a = BC$ ; $b = AC$ et $c = AB$ alors $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,cos(\hat{A})$

*Lorsque dans un triangle, on connaît 2 côtés et l'angle* adjacent à ces côtés *, on connaît alors tous les éléments du triangle.*

démonstration : $BC^2 = ||\overrightarrow{BC}||^2 = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\,\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

Exemple :
ABC est tel que AB = 5 cm, AC=8cm et $\hat{A} = 60°$. Déterminer BC, $\hat{C}$ *et* $\hat{B}$.
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos(60) = 25 + 64 - 2\times5\times8\times\frac{1}{2} = 49 = 7^2$. Donc BC = 7 cm
$\text{Cos}(\hat{B}) = \frac{BC^2+BA^2-AC^2}{2BC\times BA} = \frac{1}{7}$ donc $\hat{B} \approx 81{,}7°$ et ainsi $\hat{C} \approx 38{,}3$

### 3. Formule des aires et propriété des sinus

Propriété :
Dans un triangle ABC, avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :

$$Aire(ABC) = \frac{1}{2}bcsin(\hat{A}) = \frac{1}{2}acsin(\hat{B}) = \frac{1}{2}absin(\hat{C})$$

Dessin avec la hauteur :

Remarque : Lorsque dans un triangle, on connaît 2 côtés et l'angle adjacent à ces côtés , on connaît alors l'aire du triangle.

Conséquence :
Dans un triangle ABC, avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :

$$\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

Dessin

Remarque : Lorsque dans un triangle, on connaît 2 mesures d'angles (donc 3 !) et un côtés, alors on connaît tous les éléments du triangle.

## IV. Trigonométrie

### 1. Formules d'addition

Propriété :
Pour tous réels a et b,

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Remarque :
IL FAUT LES CONNAITRE PAR CŒUR, LES AUTRES S'EN DEDUISENT !
Moyen mnémotechnique : sin : sicocosi et le sin est sympa (donc +)
cos : cocosisi et donc –
A vous de trouver :

$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

On transforme des cos et sin en $\cos^2$ , $\sin^2$, $\cos\times\sin$

<u>Corollaire</u> : formules de duplication
En prenant $b = a$ on obtient :

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\cos(2a) = \cos^2(a) - sin^2(a)$$

<u>Remarque</u> : A ne pas confondre avec $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ qui permet d'écrire

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - sin^2(a) = 2cos^2(a) - 1 = 1 - 2sin^2(a)$$

### 2. <u>**Formules de linéarisation**</u>

Ce sont les mêmes formules que précédemment écrites autrement :

$$cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$
$$sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

<u>Remarque</u> : on transforme des $\cos^2$ $\cos^3$ … $\sin^2$ $\sin^3$ en $\sin(2a)$ $\sin(3a)$…$\cos(2a)$, $\cos(3a)$

*il suffit finalement de connaître des 2 premières formules*

## V. <u>Lieu</u>

Exercice.